# ENA – 2019 – GABARITO COM SOLUÇÕES

---

**[01]** Se $\ell$ é o lado e $A$ é a área de um triângulo equilátero, então é correto afirmar que:

(A) $A$ e $\ell$ são grandezas diretamente proporcionais.

(B) $A$ e $\ell^2$ são grandezas diretamente proporcionais.

(C) $A$ e $\ell$ são grandezas inversamente proporcionais.

(D) $A^2$ e $\ell$ são grandezas inversamente proporcionais.

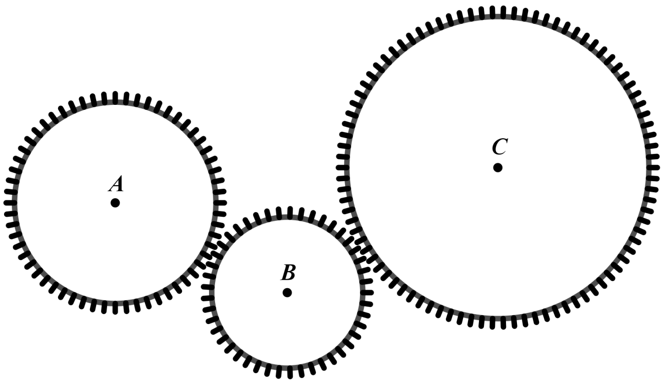
(E) $A^2$ e $\ell^2$ são grandezas inversamente proporcionais.

**Solução**
**Resposta: B**

A área do triângulo equilátero de lado $\ell$ é dada por $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \ell^2$, logo $A$ e $\ell^2$ são diretamente proporcionais.

---

**[02]** Na figura, estão representadas as engrenagens $A$, $B$ e $C$, que possuem, respectivamente, 60, 45 e 90 dentes cada uma. Quantas voltas completas dará a engrenagem $A$ se a engrenagem $C$ der 4 voltas completas e mais $\dfrac{2}{3}$ de volta?




(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

**Solução**
**Resposta: C**

A engrenagem $B$ não é relevante para o problema. O que realmente importa é a relação entre o número de dentes das engrenagens $A$ e $C$. Como a razão entre o número de dentes das engrenagens $A$ e $C$ é $\dfrac{60}{90} = \dfrac{2}{3}$, isto significa que a cada 3 voltas da engrenagem $A$, a engrenagem $C$ dará 2 voltas. Como $4 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$, chamando de $n$ o número de voltas dados pela engrenagem $A$ quando a engrenagem $C$ dá 4 voltas completas mais $\dfrac{2}{3}$ de volta temos que:

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{14}{3}}{n}, \text{ ou seja, } n = 7.$$

**[03]** Qual é a soma dos valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $\dfrac{k}{x^2-4} + \dfrac{1}{x+2} = 0$ não possua solução real?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

**Solução**
**Resposta: E**
Temos que $\dfrac{k}{x^2-4} + \dfrac{1}{x+2} = 0 \iff \dfrac{k+x-2}{x^2-4} = 0$.

A equação possui solução real se, e somente se, $k = 2 - x$, com $x \neq -2$ e $x \neq 2$.

Portanto, para $k = 0$ ou $k = 4$ a equação não possui solução real e a resposta é igual a $0 + 4 = 4$.

---

**[04]** Quantas raízes reais possui a equação $3 + \sqrt{3 + x^4} = x^2$ ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

**Solução**

**Resposta: A**
Consideremos a equação $3 + \sqrt{3+x^4} = x^2$, ou equivalentemente, $\sqrt{3+x^4} = x^2 - 3$ e assim $x^2 - 3 \geqslant 0$.

Elevando ao quadrado, obtemos $3 + x^4 = x^4 - 6x^2 + 9$, logo $x^2 = 1$.

Como devemos ter $x^2 - 3 \geqslant 0$, a equação não tem solução.

---

**[05]** Considere as asserções abaixo e a relação proposta entre elas.

I. A soma e o produto das raízes da equação $2x^2 + 5x + 2 = 0$ são $-5$ e 2, respectivamente.

**PORQUE**

II. Se $s$ e $p$ são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $s = -b$ e $p = c$.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

(A) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa da I.

(B) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

(C) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

(D) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

(E) As asserções I e II são proposições falsas.

**Solução**
**Resposta: E**
Se $s$ e $p$ são, respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então $s = -\dfrac{b}{a}$ e $p = \dfrac{c}{a}$. Portanto, as asserções I e II são proposições falsas.

**[06]** Que número inteiro pode ser escrito como $\sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}}$ ?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

**Solução**
**Resposta: D**
Considere $n = \sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}}$. Note que $n > 0$.
Elevando os dois membros da igualdade ao quadrado obtemos

$$n^2 = 19+6\sqrt{10} - 2\sqrt{19+6\sqrt{10}} \cdot \sqrt{19-6\sqrt{10}} + 19 - 6\sqrt{10},$$

logo

$$n^2 = 38 - 2\sqrt{\left(19+6\sqrt{10}\right)\left(19-6\sqrt{10}\right)}$$

e assim

$$n^2 = 38 - 2\sqrt{(19)^2 - \left(6\sqrt{10}\right)^2} = 38 - 2\sqrt{361-360} = 36.$$

Como $n > 0$, segue que $n = 6$.

**Solução alternativa:** Notemos que

$$\sqrt{19+6\sqrt{10}} = \sqrt{10+6\sqrt{10}+9} = \sqrt{(\sqrt{10}+3)^2} = \sqrt{10}+3.$$

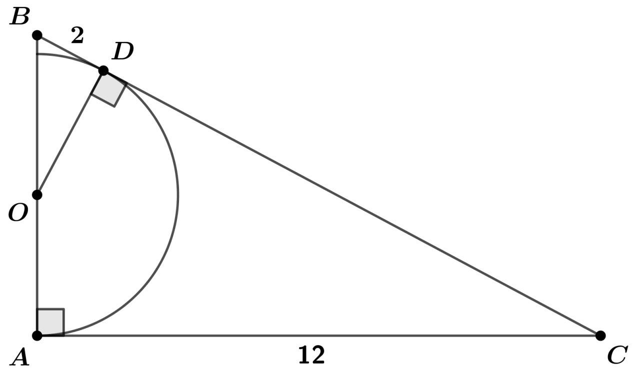
Analogamente,

$$\sqrt{19-6\sqrt{10}} = \sqrt{10-6\sqrt{10}+9} = \sqrt{(\sqrt{10}-3)^2} = \sqrt{10}-3.$$

Assim, $n = \sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}} = 6$.

---

**[07]** Na figura abaixo, o semicírculo de centro $O$ é tangente à hipotenusa $BC$ e ao cateto $AC$ do triângulo retângulo $ABC$. Se $\overline{BD} = 2$ e $\overline{AC} = 12$, determine o raio do semicírculo.




(A) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

(B) $\dfrac{7}{\sqrt{13}}$

(C) $\dfrac{12}{\sqrt{13}}$

(D) $\dfrac{13}{\sqrt{13}}$

(E) $\dfrac{15}{\sqrt{13}}$

**Solução**
**Resposta: C**
Observe que $\overline{AC} = \overline{DC}$, pois ambos são segmentos determinados por retas tangentes ao círculo, com extremos no mesmo ponto $C$. Assim, $\overline{DC} = 12$.

Aplicando Pitágoras nos triângulos retângulos $BAC$ e $ODB$ obtemos $\overline{AB}^2 = (14)^2 - (12)^2 = 196 - 144 = 52$ e $\overline{OB}^2 = 4 + r^2$.

Temos ainda que, $\overline{OB} = \overline{AB} - r = \sqrt{52} - r$.

Logo $4 + r^2 = (\sqrt{52} - r)^2$ e assim $4 + r^2 = 52 - 2r\sqrt{52} + r^2$, ou seja, $2r\sqrt{52} = 48$.

Portanto $r = \dfrac{24}{\sqrt{52}} = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

**Solução alternativa**: Chamemos $\overline{OB} = x$ e $\overline{OA} = r$. Por propriedades de tangência segue que $\overline{CD} = 12$.

Os triângulos $OBD$ e $ABC$ são semelhantes, logo valem as relações: $\dfrac{2}{r+x} = \dfrac{r}{12} = \dfrac{x}{14}$.

Então $x = \dfrac{7}{6}r$ e $r^2 + \dfrac{7}{6}r^2 = 24$, logo $\dfrac{13}{6}r^2 = 24$; portanto $r = \dfrac{12}{\sqrt{13}}$.

---

**[08]** A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles $T_1$, cujos catetos medem $\ell$, é o cateto de um triângulo retângulo isósceles $T_2$. A hipotenusa de $T_2$ é o cateto de um triângulo retângulo isósceles $T_3$, cuja hipotenusa é cateto do triângulo retângulo isósceles $T_4$ e assim por diante. O valor de $\ell$ que torna a medida da hipotenusa de $T_{100}$ igual a $2^{50}$ é:

(A) $\sqrt{2}$

(B) 1

(C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 2

(E) $2\sqrt{2}$

**Solução**
**Resposta: B**
Utilizando o teorema de Pitágoras pode-se concluir facilmente que as hipotenusas de $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, \ldots$ medem, respectivamente, $\ell\sqrt{2}, 2\ell, 2\ell\sqrt{2}, 4\ell, 4\ell\sqrt{2}, 8\ell, \ldots$ . Assim, se considerarmos apenas os triângulos de índice par $T_2, T_4, T_6, T_8, \ldots$, veremos que suas hipotenusas medem $2^1\ell, 2^2\ell, 2^3\ell, 2^4\ell, \ldots$, isto é, que a hipotenusa de $T_{2n}$ medirá $2^n\ell$. Como para $n = 100$ temos que a hipotenusa de $T_{100}$ mede $2^{50}\ell$, concluímos que $\ell = 1$.

---

**[09]** Dois carros partem da cidade A para a cidade B pela mesma estrada, cujo trecho entre A e B mede 120km. O primeiro carro parte às 10h com velocidade constante de 60km/h e o segundo carro sai às 10h10min com velocidade constante de 80km/h. A que horas o segundo carro alcançará o primeiro?

(A) 10h30min

(B) 10h40min

(C) 10h50min

(D) 11h10min

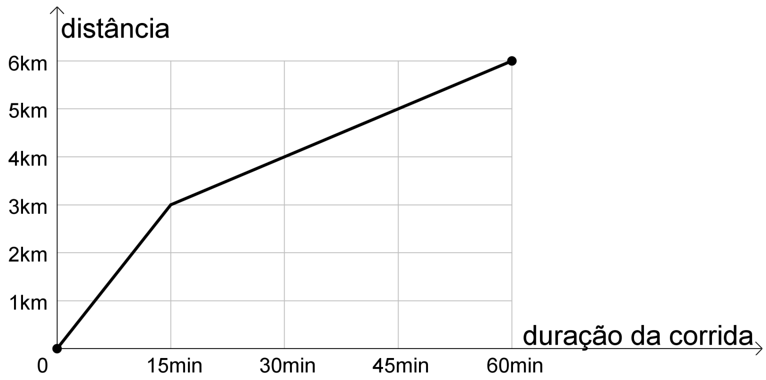
(E) 11h20min

**Solução**
**Resposta: B**
Indicaremos por $d$ a distância percorrida pelos carros quando o segundo encontra o primeiro. Sejam $t_1$ e $t_2$ os tempos gastos, em horas, para o primeiro e o segundo carro percorrerem a distância $d$, respectivamente.
Temos que $t_1 = t_2 + \dfrac{1}{6}$, logo $\dfrac{d}{60} = \dfrac{d}{80} + \dfrac{1}{6}$.

Resolvendo a equação do primeiro grau, acima, obtemos $d = 40$ e assim $t_1 = \dfrac{2}{3}$.

Portanto, a resposta correta é 10h40min.

**[10]** O gráfico abaixo mostra o progresso de um corredor, em uma corrida de 6km de extensão.




Costuma-se chamar de *pace* a razão $\frac{t}{d}$, onde $t$ é o tempo, em minutos, que um corredor leva para percorrer uma distância $d$, em quilômetros. Desta forma, considerando a corrida representada pelo gráfico acima, é correto afirmar que

(A) o *pace* do corredor foi maior nos 15 primeiros minutos do que na corrida inteira.

(B) o *pace* do corredor foi menor nos 15 últimos minutos do que na corrida inteira.

(C) o *pace* do corredor foi menor nos 30 últimos minutos do que na corrida inteira.

(D) o *pace* do corredor foi menor nos 3 primeiros quilômetros do que na corrida inteira.

(E) o *pace* do corredor foi menor nos 3 últimos quilômetros do que na corrida inteira.

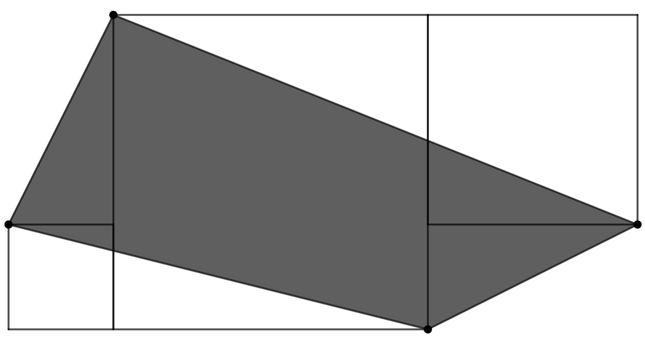
**Solução**
**Resposta: D**
Calculando o *pace* em cada um dos intervalos de tempo ou distância citados, a partir das informações do gráfico, temos

- *pace* na corrida inteira: $\frac{60\text{min}}{6\text{km}} = 10\text{min}/\text{km}$
- *pace* nos 15 primeiros minutos: $\frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min}/\text{km}$
- *pace* nos 15 últimos minutos: $\frac{15\text{min}}{1\text{km}} = 15\text{min}/\text{km}$
- *pace* nos 30 últimos minutos: $\frac{30\text{min}}{2\text{km}} = 15\text{min}/\text{km}$
- *pace* nos 3 primeiros quilômetros: $\frac{15\text{min}}{3\text{km}} = 5\text{min}/\text{km}$
- *pace* nos 3 últimos quilômetros: $\frac{45\text{min}}{3\text{km}} = 15\text{min}/\text{km}$

Assim, de todos os itens, o único que se aplica é o D.

---

**[11]** O quadrado central da figura abaixo tem seus lados inferior e superior alinhados com os quadrados da esquerda e da direita, respectivamente. O lado superior do quadrado da esquerda está alinhado com o lado inferior do quadrado da direita.



Sabendo que a área do quadrado central é igual a 9 e que os quadrados possuem lados de medidas distintas, a área do quadrilátero destacado é um

(A) número par.

(B) quadrado perfeito.

(C) número primo.

(D) múltiplo de 5.

(E) cubo perfeito.

**Solução**
**Resposta: B**
Vamos indicar por $x$ a medida do lado do quadrado da esquerda. Como o lado do quadrado central mede 3, a medida do lado do quadrado da direita é igual a $3-x$. Fazendo prolongamentos dos lados dos quadrados completamos a área formada pelos três quadrados de modo a formar um retângulo cujos lados medem 3 e 9.
A área $A$ do quadrilátero destacado é igual a diferença entre a área do retângulo obtido e a soma das áreas dos 4 triângulos retângulos que completam o retângulo, isto é,

$$A = 18 - \left[\frac{(3-x)x}{2} + \frac{(6-x)(3-x)}{2} + \frac{(3-x)x}{2} + \frac{(3+x)x}{2}\right].$$

Fazendo as contas obtemos

$$A = 18 - \left[\frac{3x - x^2 + 18 - 6x - 3x + x^2 + 3x - x^2 + 3x + x^2}{2}\right] = 18 - 9 = 9.$$

Portanto a resposta é um quadrado perfeito.

---

**[12]** Dado $n \in \mathbb{Z}$, com $n \geqslant 1$, para quantos valores **inteiros** de $m$ a equação

$$x^2 + mx + mn = 0$$

**não** possui soluções reais?

(A) $4n-1$

(B) $4n$

(C) $4n+1$

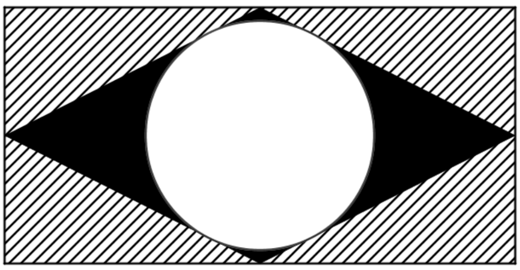
(D) $4n+2$

(E) infinitos valores

**Solução**
**Resposta: A**
Considerando a equação $x^2+mx+mn=0$ temos que
$\Delta = m^2 - 4mn = m(m-4n) < 0$ se, e somente se, $0 < m < 4n$.
Portanto, para $m \in \{1, 2, \ldots, 4n-1\}$ a equação não possui soluções reais.

---

**[13]** Na figura abaixo temos um círculo inscrito em um losango cujos vértices são os pontos médios dos lados de um retângulo, cuja base tem o dobro da altura. A razão entre a área preenchida de preto e a área listrada é dada por:



(A) $\dfrac{1-\pi}{5}$

(B) $\dfrac{1+\pi}{5}$

(C) $2-\dfrac{5}{\pi}$

(D) $1-\dfrac{\pi}{5}$

(E) $\dfrac{5}{\pi}-1$

**Solução**
**Resposta: D**
Como queremos calcular a razão entre as áreas podemos supor que a base do retângulo mede 2 unidades e a altura mede uma unidade.
Cada lado do losango mede $\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Indicando por $r$ o raio do círculo, por semelhança de triângulos obtemos $\frac{r}{1}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$, logo $r=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculando as áreas obtemos:

a área do losango é igual a $2\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=1$.

a área da região listrada é igual a $2-1=1$.

a área do cìrculo é igual a $\frac{\pi}{5}$.

a área preenchida de preto é igual a $1-\frac{\pi}{5}$.

Portanto, a razão entre a área preenchida de preto e a área listrada é dada por $\frac{1-\frac{\pi}{5}}{1}=1-\frac{\pi}{5}$.

---

**[14]** Denomina-se terno pitagórico um trio $(a,b,c)$ de números inteiros positivos tais que satisfazem a expressão $a^2+b^2=c^2$. Se $\left(x+2,2x,5\sqrt{x}\right)$ é um terno pitagórico, então $x$ é

(A) múltiplo de 5.

(B) primo.

(C) divisível por 3.

(D) divisível por 7.

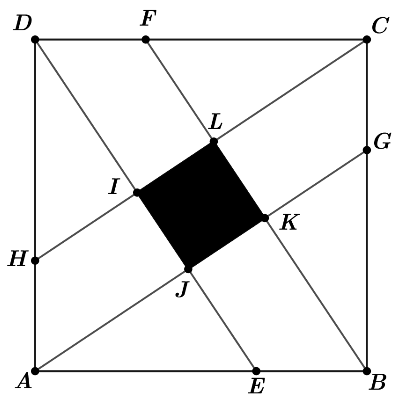
(E) par.

**Solução**
**Resposta: E**
Como $\left(x+2,2x,5\sqrt{x}\right)$ é um terno pitagórico, aplicando a definição temos que

$$(x+2)^2+(2x)^2=\left(5\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow 5x^2-21x+4=0.$$

Nas condições do problema os valores do terno precisam ser inteiros positivos, logo, resolvendo a equação acima, temos que $x=4$. Portanto, $x$ é par.

**[15]** Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Além disso, $AG$ é paralelo a $CH$, $BF$ é paralelo a $DE$, $\overline{FC} = 2 \cdot \overline{DF}$ e $\overline{DH} = 2 \cdot \overline{AH}$. A área do quadrilátero $IJKL$, que possui como vértices os pontos de interseção dos segmentos $AG, CH, BF$ e $DE$, representa que fração da área do quadrado $ABCD$?




(A) $\dfrac{1}{9}$

(B) $\dfrac{1}{8}$

(C) $\dfrac{1}{13}$

(D) $\dfrac{1}{16}$

(E) $\dfrac{1}{17}$

**Solução**
**Resposta: C**
Por argumentos de simetria é fácil ver que os triângulos $AEJ$, $BGK$, $CFL$ e $DHI$ são todos triângulos retângulos congruentes entre si, bem como os triângulos $ABK$, $BCL$, $CDI$ e $DAJ$. Designaremos a área de cada um dos quatro primeiros por $s$ e a área de cada um dos quatro últimos por $S$. Como $EJ//BK$, então $AEJ$ e $ABK$ são semelhantes e como $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{2}{3}$, isso significa que a razão entre as áreas desses dois triângulos é $\dfrac{s}{S} = \dfrac{4}{9}$, já que é o quadrado da razão de semelhança. Note ainda que $ABG$, cuja área é a soma das áreas de $ABK$ com $BGK$, possui $\dfrac{1}{3}$ da área de $ABCD$, que designaremos por $Q$. Assim, $\dfrac{Q}{3} = S + s = S + \dfrac{4S}{9} = \dfrac{13S}{9}$, isto é, $S = \dfrac{3Q}{13}$. Agora, designando por $q$ a área de $IJKL$, temos que $q = Q - 4S = Q - 4 \cdot \dfrac{3Q}{13} = \dfrac{Q}{13}$. Logo a área do quadrado $IJKL$ corresponde a $\dfrac{1}{13}$ da área de $ABCD$.

---

**[16]** Considere dois triângulos isósceles $ABC$ e $DEF$ de mesma área, não congruentes e tais que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{DE} = \overline{DF}$. Podemos afirmar que se $\overline{BC} < \overline{EF}$, então a razão $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ entre as bases desses dois triângulos é igual a:

(A) $\dfrac{\text{sen } \hat{A}}{1 + \cos \hat{A}}$

(B) $\dfrac{\text{sen } \hat{A}}{1 - \cos \hat{A}}$

(C) $\dfrac{1 - \cos \hat{A}}{1 + \cos \hat{A}}$

(D) $\dfrac{\cos \hat{A}}{1 + \text{sen } \hat{A}}$

(E) $\dfrac{\cos \hat{A}}{1 - \text{sen } \hat{A}}$

**Solução**
**Resposta: A**
Como os triângulos $ABC$ e $DEF$ possuem a mesma área, então $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2} = \dfrac{\overline{DE}\cdot\overline{DF}\cdot \operatorname{sen}\hat{D}}{2}$ e como os lados $AB$, $AC$, $DE$ e $DF$ têm todos a mesma medida, concluímos que $\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen}\hat{D}$ e que, portanto, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são suplementares, com $\hat{A}$ agudo, já que $\overline{BC} < \overline{EF}$.
Utilizando a lei dos cossenos e o fato de que $\cos\hat{D} = -\cos\hat{A}$, já que são suplementares, chegamos à:

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2} = \frac{2\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}^2\cos\hat{A}}{2\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}^2\cos\hat{A}} = \frac{1-\cos\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}$$

Multiplicando o numerador e o denominador do segundo membro por $1+\cos\hat{A}$ obtemos:

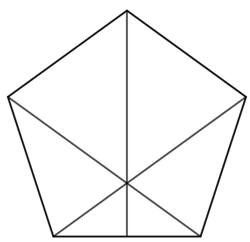
$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2} = \frac{1-\cos^2\hat{A}}{(1+\cos\hat{A})^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\hat{A}}{(1+\cos\hat{A})^2}$$

e assim

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{1+\cos\hat{A}}.$$

---

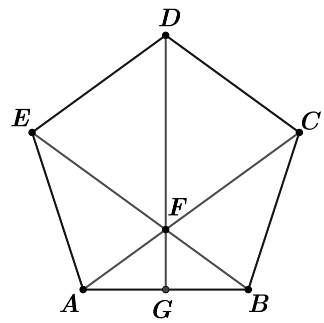
**[17]** A figura abaixo representa um pentágono regular, duas de suas diagonais e um segmento ligando um de seus vértices ao ponto médio do lado oposto a este vértice. Quantos triângulos isósceles aparecem na figura?



(A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9

**Solução**

**Resposta: D**
Na Figura aparecem 9 triângulos: $ABC$, $ABE$, $ABF$, $AFG$, $AEF$, $DEF$, $CDF$, $BCF$ e $BFG$. Destes, apenas $AFG$ e $BFG$ não são isósceles.




Vejamos, $ABC$ e $ABE$ são isósceles porque $AB = BC$ e $AB = AE$, já que $ABCDE$ é regular.
Quanto a $ABF$ verifica-se facilmente que é isósceles por argumentos de simetria.
Vamos provar que $BCF$ é isósceles. Utilizando o fato de que $ABC$ é isósceles de base $AC$ e de que $ABF$ é isósceles de base $AB$, concluímos que $C\hat{A}B = A\hat{C}B = F\hat{A}B = F\hat{B}A = \alpha$. Assim, pelo teorema do ângulo externo, $B\hat{F}C = 2\alpha$ e como a soma dos ângulos internos de $BCF$ deve ser igual a $180°$, então $C\hat{B}F = 180° - 3\alpha$. Portanto, como $A\hat{B}C = A\hat{B}F + C\hat{B}F$ e cada ângulo interno de um pentágono regular mede $108°$, temos $A\hat{B}C = 180° - 2\alpha = 108°$, de modo que $\alpha = 36°$. Desta forma $B\hat{F}C = 2\alpha = 72° = 180° - 3\alpha = C\hat{B}F$. Logo, $BCF$ é isósceles de base $BF$. Por argumento análogo prova-se que $AEF$ é isósceles de base $AF$.
Para provar que $CDF$ é isósceles (a prova para $DEF$ se faz de forma completamente análoga) basta observarmos que $CD$=$BC$, pois são lados do pentágono regular e que $BC$=$CF$ uma vez que já provamos que $BCF$ é isósceles de base $BF$. Logo $CD$=$CF$ e, portanto, $CDF$ é isósceles de base $DF$.
Quanto aos triângulos $AFG$ e $BFG$, percebe-se facilmente que não são isósceles, pois são ambos retos em $G$ e temos $G\hat{A}F = G\hat{B}F = \alpha = 36° \neq 45°$.

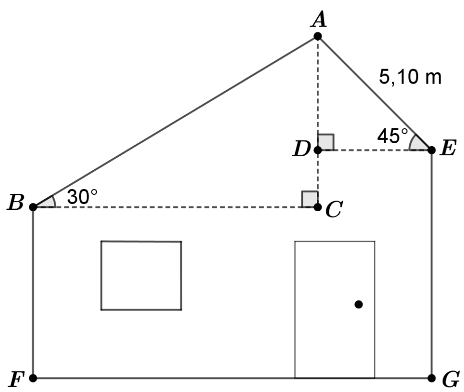
**[18]** Um triângulo retângulo $ABC$, possui hipotenusa $BC$ de medida 6cm. A maior área possível, em cm$^2$, para $ABC$ é

(A) 9 (B) $\sqrt{83}$ (C) $\sqrt{87}$ (D) 10 (E) 12

**Solução**
**Resposta: A**
Indicando por $b$ e $c$ as medidas dos catetos, temos que $b^2 + c^2 = 36$.
Assim a área, dada por $A = \dfrac{b \cdot c}{2}$, será a maior possível se, e somente se, $A^2 = \dfrac{b^2 \cdot c^2}{4} = \dfrac{b^2 \cdot (36 - b^2)}{4}$ assumir o maior valor. Logo vamos analisar $A^2$.
Colocando $b^2 = t$, segue que $A^2 = \dfrac{t(36-t)}{4}$ terá valor máximo quando $t = 18$.
Portanto, $b^2 = 18$, $A^2 = \dfrac{18 \cdot 18}{4} = 81$ e $A = 9$.

---

**[19]** Adotando $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ e $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ e sabendo que o segmento $AC$ é dividido pelo ponto $D$ na razão de 2 para 1, com $\overline{AD} > \overline{DC}$, podemos afirmar, com base nas informações contidas na figura, que representa a vista frontal de uma casa, que a largura $\overline{FG}$ da casa, em metros, é aproximadamente igual a




(A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

**Solução**
**Resposta: C**
Deseja-se saber o comprimento do segmento $FG$, ou seja, $\overline{FG} = \overline{BC} + \overline{DE}$. Sabemos que $cos\,45° = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$, concluímos que $\overline{DE} \approx 3{,}57$. Como $\hat{A}$ e $\hat{E}$ são complementares, $\hat{A} = 45°$, de modo que $ADE$ é isósceles e, portanto, $\overline{AD} = \overline{DE}$. Como a razão entre $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ é de 2 para 1, então $\overline{DC} = \dfrac{\overline{DE}}{2} \approx 1{,}79$. Assim, $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 5{,}36$. Como $tg\,30° = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ temos que $\overline{BC} \approx 9{,}46$. Portanto, $\overline{FG} \approx 9{,}46 + 3{,}57 = 13{,}03$.

---

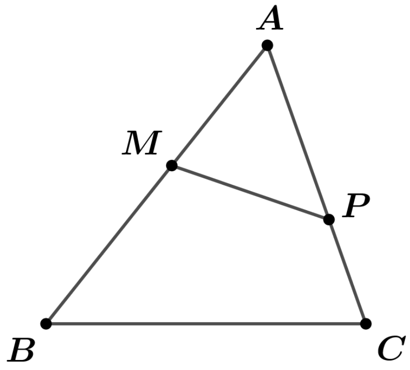
**[20]** Quantos números pares com quatro algarismos distintos existem?

(A) 1848 (B) 2230 (C) 2268 (D) 2296 (E) 2520

**Solução**

**Resposta: D**
Começamos a contagem pelos números que terminam com zero : $a_1a_2a_30$. Temos 9 escolhas para $a_1$. A partir daí 8 escolhas para $a_2$ e 7 para $a_3$. Portanto, um total de $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.
Agora, a contagem dos números que terminam com 2, 4, 6 ou 8 : $a_1a_2a_3a_4$. Temos 4 escolhas para $a_4$. A partir daí, 8 escolhas para $a_1$ ( descartamos o zero), 8 para $a_2$ e 7 para $a_3$. Assim temos um total de $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$.
A resposta é igual a $504 + 1792 = 2296$.

**[21]** Os triângulos $ABC$ e $AMP$ da figura abaixo são semelhantes e os lados $MP$ e $BC$ não são paralelos.




É sempre correto afirmar que:

(A) Os triângulos $ABC$ e $BPC$ são semelhantes.

(B) Os triângulos $BPC$ e $BMP$ são semelhantes.

(C) Os ângulos $A\hat{M}P$ e $A\hat{B}P$ são suplementares.

(D) Os ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{P}C$ são suplementares.

(E) Os ângulos $M\hat{P}B$ e $M\hat{B}P$ são congruentes.

**Solução**
**Resposta: D**
De acordo com o enunciado, temos que os ângulos $A\hat{M}P$ e $A\hat{C}B$ são congruentes; o mesmo ocorrendo com os ângulos $A\hat{P}M$ e $A\hat{B}C$. Segue-se então que os ângulos $A\hat{B}C$ e $M\hat{P}C$ são suplementares.

---

**[22]** Considere as seguintes afirmações sobre porcentagem:

I. $\sqrt{144\%} = 12\%$.

II. $\sqrt[3]{12{,}5\%} = 50\%$

III. $3\% \cdot 5\% = 15\%$.

É correto o que se afirma em

(A) II, apenas.

(B) I e II, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) III, apenas.

(E) I, II e III.

**Solução**
**Resposta: A**
Temos que

$$\sqrt{144\%} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\%,$$

$$\sqrt[3]{12,5\%} = \sqrt[3]{\frac{12,5}{100}} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 50\%$$

e

$$3\% \cdot 5\% = \frac{3}{100} \cdot \frac{5}{100} = \frac{15}{100} \cdot \frac{1}{100} = 0,15\%.$$

Portanto, apenas II está correta.

**[23]** No mês de janeiro um lojista aumentou o preço das roupas em 10% e em fevereiro aumentou o novo preço em mais 10%. No mês de março resolveu fazer uma liquidação e ofereceu um desconto de 20%. Em relação ao preço antes dessas três alterações, podemos afirmar que

(A) houve uma diminuição de $3,2\%$.

(B) houve um aumento de $3,2\%$.

(C) houve um aumento de $3,9\%$.

(D) houve uma diminuição de $3,9\%$.

(E) permaneceu o mesmo.

**Solução**
**Resposta: A**
Seja $x$ o preço inicial de uma roupa. Em janeiro, passou a custar $x + \frac{10}{100}x = 1,1x$.

Em fevereiro, $1,1x + \frac{10}{100}1,1x = 1,21x$.

Em março, $1,21x - \frac{20}{100}1,21x = 0,968x = (1 - 0,032)x = x - \frac{3,2}{100}x$.

Portanto, houve uma diminuição de $3,2\%$.

---

**[24]** Em um estacionamento há 5 vagas exclusivamente para carros e 7 vagas mais estreitas exclusivamente para motos. De quantas formas é possível estacionar 3 carros e 4 motos nessas vagas?

(A) 25.200

(B) 50.400

(C) 52.000

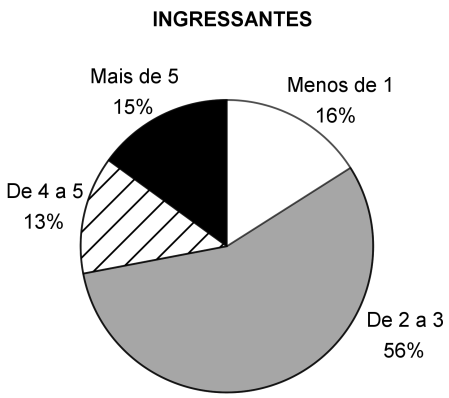
(D) 100.800

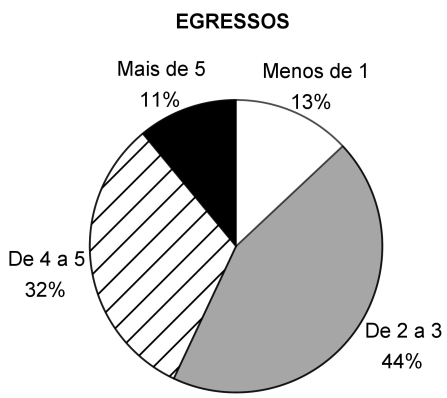
(E) 104.000

**Solução**
**Resposta: B**
Para o primeiro carro a ser estacionado temos 5 possibilidades de escolha. Uma vez estacionado o primeiro carro, sobram 4 escolhas para o segundo, logo temos $5 \cdot 4 = 20$ possibilidades para estacionar dois carros. Para cada uma destas possibilidades sobram três vagas para o terceiro carro. Logo, o número total de possibilidades para o estacionamento dos carros é igual a $20 \cdot 3 = 60$.
De modo análogo, temos $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ possibilidades para estacionar as motos.
Para cada uma das 60 possibilidades do estacionamento dos carros temos 840 escolhas para o estacionamento das motos, portanto a resposta é igual a $60 \cdot 840 = 50.400$.

---

**[25]** Uma pesquisa sobre renda familiar foi realizada com os alunos ingressantes de um curso e mais tarde com aqueles que conseguiram concluí-lo.



Sabendo que houve evasão durante o curso e que, ao longo deste, alguns alunos mudaram sua faixa de renda, podemos afirmar, com base nos gráficos e no fato de que novos alunos não mais adentraram no curso desde então, que:

(I) certamente houve diminuição no número de alunos que recebiam mais de 5 salários mínimos do início para o final do curso.

(II) 12% dos alunos que recebiam de 2 a 3 salários mínimos não concluíram o curso.

(III) é possível que a quantidade de alunos que recebiam de 4 a 5 salários mínimos quando concluíram o curso seja menor do que a quantidade de alunos que, quando ingressaram, pertenciam a esta faixa de renda.

É correto o que se afirma em:

(A) I, apenas.

(B) II, apenas.

(C) I e III, apenas.

(D) II e III, apenas.

(E) I, II e III.

**Solução**
**Resposta: C**
Como o total de alunos do curso diminuiu, em valor absoluto, com a evasão, e também o percentual de alunos que recebem mais de 5 salários mínimos diminuiu, então, certamente houve diminuição do número de alunos nesta faixa de renda, logo (I) é verdadeira.
Já a afirmação (II) é falsa, pois mesmo que não houvesse evasão entre aqueles que recebiam de 2 a 3 salários mínimos, o fato de que alguns alunos mudarem sua faixa de renda seria suficiente para justificar uma redução no percentual de alunos nesta faixa de renda.
Agora a assertiva (III) é verdadeira, porque se, por exemplo, tivessem ingressado 300 alunos no curso e evadido 200, teríamos inicialmente 39 alunos (13% de 300) recebendo de 4 a 5 salários e teriam concluído o curso apenas 32 alunos (32% de 100) nesta faixa de renda.

---

**[26]** Uma prova possui 30 questões de múltipla escolha, cada questão possui 5 itens, dentre os quais há sempre um único item correto. Se João acertou todas as 26 questões que sabia resolver e marcou aleatoriamente todas as que não sabia, qual é a probabilidade de João errar no máximo uma questão?

(A) $\frac{1}{625}$ (B) $\frac{16}{625}$ (C) $\frac{21}{625}$ (D) $\frac{17}{625}$ (E) $\frac{624}{625}$

**Solução**
**Resposta: D**
Já sabemos que João acertou 26 questões, então há apenas 4 questões que ele pode errar na prova. Como cada questão possui 5 itens, dos quais apenas um é correto, a probabilidade de João errar uma questão é igual a $\frac{4}{5}$ e a de ele acertar é igual a $\frac{1}{5}$. Assim, a probabilidade de João errar no máximo uma questão corresponde a probabilidade de ele acertar todas as questões, que é igual a $\left(\frac{1}{5}\right)^4$ mais a probabilidade de ele errar uma única questão, que é igual a $4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$, isto é, $\frac{1}{625} + \frac{16}{625} = \frac{17}{625}$.

---

**[27]** Um dado não viciado é lançado duas vezes. Neste contexto, 25% é a probabilidade de

(A) obter um número par e um número ímpar, independentemente da ordem em que aconteçam.

(B) obter dois números menores do que 3.

(C) obter dois números de mesma paridade (ambos pares ou ambos ímpares).

(D) o resultado do segundo lançamento ser menor que o do primeiro.

(E) obter dois números pares.

**Solução**
**Resposta: E**
O espaço amostral é formado por todos os pares de resultados possíveis. Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \cdot 6 = 36$, todos com a mesma possibilidade de ocorrência.

(A) No primeiro lançamento temos 6 possibilidades. Para cada escolha, como a paridade no segundo lançamento tem que ser diferente, temos 3 possibilidades, logo 18 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

(B) No primeiro lançamento temos 2 possibilidades e no segundo também 2 possibilidades, logo 4 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

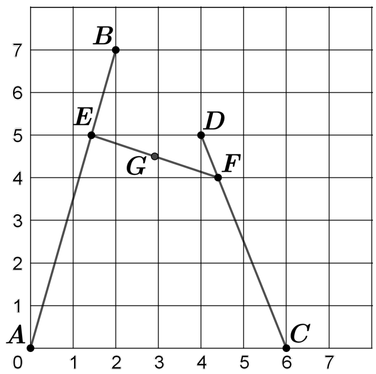
(C) Usando o item $(A)$ concluimos que a probabilidade, neste caso, é igual a $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

(D) O número de casos favoráveis é igual a $\frac{36-6}{2} = 15$. A probabilidade, neste caso, é igual $\frac{15}{36}$.

(E) No primeiro lançamento temos 3 possibilidades e no segundo também 3 possibilidades, logo 9 casos favoráveis. Portanto, a probabilidade, neste caso, é igual a $\frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$.

---

**[28]** Sendo $A$, $B$, $C$ e $D$ pontos de coordenadas inteiras e $E$ e $F$ os pontos de interseção dos segmentos $AB$ e $CD$ com as linhas horizontais da malha, podemos afirmar que a abscissa do ponto médio $G$ do segmento $EF$ é dada por:




(A) $\frac{20}{7}$

(B) $\frac{102}{35}$

(C) $\frac{29}{10}$

(D) $\frac{32}{11}$

(E) $\frac{62}{21}$

**Solução**
**Resposta: B**
Sejam $I$, $J$, $K$ e $L$, respectivamente, os pontos de coordenadas $(2,0)$, $(4,0)$, $(2,5)$ e $(4,4)$. Podemos afirmar, a partir da semelhança dos triângulos $ABI$ e $EBK$ que o segmento $EK$ mede $\frac{4}{7}$ e que, portanto, a abscissa $x_1$ do ponto $E$ é dada por $x_1 = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$. Tendo em vista também a semelhança dos triângulos $CDJ$ e $FDL$ concluímos que o segmento $LF$ mede $\frac{2}{5}$ e que, portanto, a abscissa $x_2$ do ponto $F$ é dada por $x_2 = 4 + \frac{2}{5} = \frac{22}{5}$. Como $G$ é ponto médio de $EF$, então a abscissa $x$ de $G$ corresponde a média aritmética das abscissas de $E$ e de $F$. Desse modo temos:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{102}{35}.$$

**[29]** As médias aritméticas das notas das turmas A e B são, respectivamente, iguais a 6 e 5. Sabendo que a turma A tem 30 alunos e a turma B tem 45 alunos, a média aritmética das notas dos 75 alunos das duas turmas é igual a

(A) 5,30 (B) 5,35 (C) 5,40 (D) 5,42 (E) 5,50

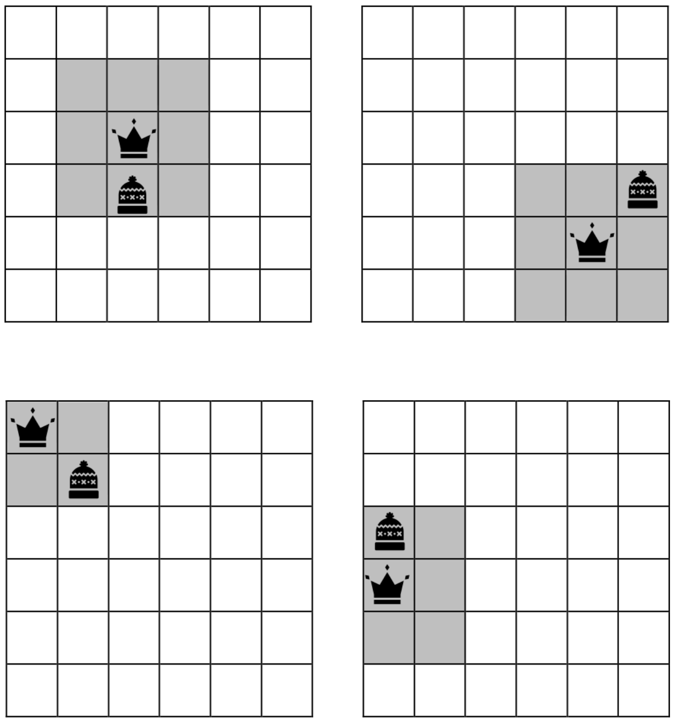
**Solução**
**Resposta: C**
A média aritmética da turma A é dada por $M_A = \frac{S_A}{30}$, onde $S_A$ é a soma das notas dos 30 alunos.
A média aritmética da turma B é dada por $M_B = \frac{S_B}{45}$, onde $S_B$ é a soma das notas dos 45 alunos.
A média dos 75 alunos das turmas A e B é igual a

$$M = \frac{S_A + S_B}{75} = \frac{30}{75} \cdot \frac{S_A}{30} + \frac{45}{75} \cdot \frac{S_B}{45}$$

Como $M_A = 6$ e $M_B = 5$, obtemos $M = \frac{30}{75} \cdot 6 + \frac{45}{75} \cdot 5 = \frac{405}{75} = 5,40$.

---

**[30]** Duas peças distintas devem ser dispostas em um tabuleiro $6 \times 6$, de forma que não ocupem a mesma casa ou casas adjacentes, isto é, casas com um lado ou vértice em comum. Como exemplo, a figura abaixo mostra quatro situações que **não são admitidas**.



Observamos que, em cada uma das figuras acima, uma vez posicionada a peça com a coroa, as casas marcadas em cinza são todas aquelas onde a outra peça não poderia estar.
De quantas formas distintas é possível dispor as duas peças segundo as regras acima?

(A) 520 (B) 516 (C) 996 (D) 1032 (E) 1040

**Solução**
**Resposta: E**
Fixada a posição da coroa numa das 36 posições do tabuleiro, faremos a contagem das possibilidades de colocação da segunda peça, obedecendo as regras. Chamaremos de posições laterais as da primeira e última linha e as da primeira e última coluna, as outras posições serão chamadas de posições centrais.

- Fixando a coroa numa das 16 posições centrais sobram $36 - 9 = 27$ posições para a segunda peça, logo temos $16 \cdot 27 = 432$ possibilidades.
- Fixando a coroa num dos 4 cantos das laterais sobram $36 - 4 = 32$ posições para a segunda peça, logo temos $4 \cdot 32 = 128$ possibilidades.
- Fixando a coroa nos 16 lugares restantes nas laterais sobram $36 - 6 = 30$ posições para a segunda peça, logo $30 \cdot 16 = 480$ possibilidades.

Portanto, temos um total de $432 + 128 + 480 = 1040$ possibilidades.